PROBLEMI RISOLTI

Problema 2.1

Un triangolo rettangolo ha un cateto di 40 cm e l'angolo opposto di 50°. Determinare tutti gli altri elementi.
NOTA: per i valori delle funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente) utilizzare la tabella in Appendice o una calcolatrice scientifica.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
$a = 40$ cm $\alpha = 50°$ sen 50° = 0,766 tan 50° = 1,192	$\beta = 40°$ $b \cong 33{,}6$ cm $c \cong 52{,}2$ cm	β = secondo angolo acuto b = secondo cateto c = ipotenusa

$\alpha + \beta = 90°$ (angoli complementari)
$\beta = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$
$\mathrm{sen}\alpha = a / c$
$c = a / \mathrm{sen}\alpha = 40 \text{ cm} / \mathrm{sen}50° = 40 \text{ cm} / 0{,}766 \cong 52{,}2 \text{ cm}$
$\tan\alpha = a / b$
$b = a / \tan\alpha = 40 \text{ cm} / \tan50° = 40 \text{ cm} / 1{,}192 \cong 33{,}6 \text{ cm}$

Problema 2.2

Un triangolo rettangolo ha un cateto di 2,0 m e l'ipotenusa di 4,5 m. Determinare tutti gli altri elementi del triangolo.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
$a = 2{,}0$ m $c = 4{,}5$ m	$\alpha \cong 26°$ $\beta = 64°$ $b \cong 4{,}1$ m	α = angolo opposto ad a

$\mathrm{sen}\alpha = a / c = 2 \text{ m} / 4{,}5 \text{ m} = 0{,}444 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 26°$
$\beta = 90° - \alpha = 90° - 26° = 64°$
$\cos\alpha = b / c$
$b = c \cdot \cos\alpha = 4{,}5 \text{ m} \cdot \cos26° = 4{,}5 \text{ m} \cdot 0{,}899 \cong 4{,}1 \text{ m}$

Problema 2.3

Un triangolo rettangolo ha un angolo di 72° e l'ipotenusa di 12,0 cm. Determinare tutti gli altri elementi del triangolo.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
α = 72° z = 12,0 cm	β = 18° x $\cong$ 11,4 cm y $\cong$ 3,7 cm	x = cateto opposto ad α y = cateto adiacente ad α

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 72° = 18°$
$\text{sen}\alpha = x / z$
$x = z \cdot \text{sen}\alpha = 12{,}0\ \text{cm} \cdot \text{sen}72° = 12{,}0\ \text{cm} \cdot 0{,}951 \cong 11{,}4\ \text{cm}$
$\cos\alpha = y / z$
$y = z \cdot \cos\alpha = 12{,}0\ \text{cm} \cdot \cos 72° = 12{,}0\ \text{cm} \cdot 0{,}309 \cong 3{,}7\ \text{cm}$

Problema 2.4

Un triangolo scaleno ha due lati di 4 m e 6 m. Sapendo che l'angolo fra essi compreso è di 37°, determinare il terzo lato e gli altri due angoli.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
a = 4 m b = 6 m γ = 37°	c $\cong$ 3,7 m $\alpha \cong$ 41° β = 102°	c = terzo lato α = angolo opposto ad a β = angolo opposto a b γ = angolo opposto a c h = altezza relativa (perpendicolare) a b

$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma)}$ (Teorema di Carnot)
$c = \sqrt{(4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 37°)} = \sqrt{(16 + 36 - 48 \cdot 0{,}799)} = \sqrt{(52 - 38{,}4)} = \sqrt{13{,}6} \cong 3{,}7\ \text{m}$

Tracciando l'altezza "h" relativa a "b" si ottengono 2 triangoli rettangoli: uno con ipotenusa "a" e l'altro con ipotenusa "c". Nei due triangoli "h" sarà il cateto opposto sia ad α che a γ, per cui:
$\text{sen}\gamma = h / a \quad \Rightarrow \quad h = a \cdot \text{sen}\gamma$
$\text{sen}\alpha = h / c \quad \Rightarrow \quad h = c \cdot \text{sen}\alpha$
$a \cdot \text{sen}\gamma = c \cdot \text{sen}\alpha$
$\text{sen}\alpha = a \cdot \text{sen}\gamma / c = 4\ \text{m} \cdot \text{sen}37° / 3{,}7\ \text{m} = 4 \cdot 0{,}602 / 3{,}7 \cong 0{,}651 \qquad \Rightarrow \quad \alpha \cong 41°$
$\beta = 180° - \alpha - \gamma = 180° - 41° - 37° = 102°$

Problema 2.5

Dati due vettori omogenei **a** e **b** di moduli rispettivamente 3 m e 5 m, inclinati fra di loro di 60°, determinare i moduli della loro somma e della loro differenza.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
a = 3 m b = 5 m α = 60°	c = 7 m d ≅ 4,4 m	c = modulo del vettore somma d = modulo del vettore differenza

c = a + b

$c = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha)} = \sqrt{(3^2 + 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 60°)} = \sqrt{(9 + 25 + 30 \cdot 0{,}5)} = \sqrt{(34 + 15)} =$
$= \sqrt{49} = 7$ m

d = a - b

$d = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha)} = \sqrt{(34 - 15)} = \sqrt{19} \cong 4{,}4$ m

Problema 2.6

Date due forze **a** e **b** di moduli rispettivamente 8,5 N e 15,2 N, inclinate fra di loro di 145°, determinare i moduli della loro somma e della loro differenza.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
a = 8,5 N b = 15,2 N α = 145°	c ≅ 9,6 N d ≅ 22,7 N	c = modulo della forza somma d = modulo della forza differenza

c = a + b

$c = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha)} = \sqrt{(8{,}5^2 + 15{,}2^2 + 2 \cdot 8{,}5 \cdot 15{,}2 \cdot \cos 145°)} =$
$= \sqrt{(72{,}25 + 231{,}04 + 258{,}4 \cdot (-0{,}819))} = \sqrt{(303{,}29 - 211{,}63)} = \sqrt{91{,}66} \cong 9{,}6$ N

d = a - b

$d = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\alpha)} = \sqrt{(303{,}29 + 211{,}63)} = \sqrt{514{,}92} \cong 22{,}7$ N

Problema 2.7

Determinare il prodotto scalare e quello vettoriale fra due vettori **F** e **d** inclinati fra loro di 28°, sapendo che i loro moduli hanno i seguenti valori: F = 100 N e d = 4 m.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
F = 100 N d = 4 m α = 28°	L $\cong$ 353 J M $\cong$ 188 Nm	L = *valore* del prodotto scalare (= Lavoro della forza) **M** = *vettore* prodotto vettoriale (= Momento della forza) M = modulo di **M**

L = **F · d** = F · d · cosa = 100 N · 4 m · cos28° = 400 N·m · 0,883 $\cong$ 353 N·m $\cong$ 353 J

M = d ^ F
- Modulo di **M**: M = d · F · senα = 4 m · 100 N · sen28° = 400 N·m · 0,469 $\cong$ 188 Nm
- Direzione di **M**: retta perpendicolare al piano formato da **F** e da **d** e passante per l'origine dei due vettori.
- Verso di **M** : avanzamento di una vite destrorsa puntata nell'origine dei due vettori quando si fa ruotare **d** su **F**.

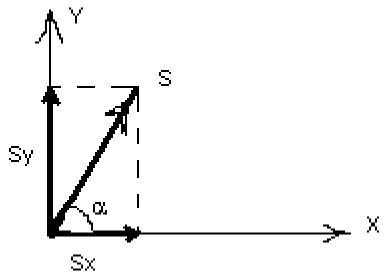
Es.: Disegnando su un foglio il vettore **F** lungo l'asse delle ascisse (orizzontale) e **d** inclinato al di sopra dell'asse di 28°, il vettore **M** risulterà entrante perpendicolarmente al foglio e passante per il punto di origine dei due vettori dati. Infatti facendo ruotare **d** verso **F** otterremo una rotazione oraria, ossia l'avanzamento di una vite all'interno del foglio.
Se il vettore **d** venisse disegnato al di sotto di **F**, la rotazione sarà antioraria ed **M** avrà verso opposto, ossia uscente dal foglio.

Problema 2.8

Sul piano cartesiano si disegni un vettore avente per modulo il valore di 18 m e sia inclinato sull'asse delle ascisse di 54°. Disegnare le componenti cartesiane e determinarne i moduli.

Risoluzione

Dati	Incognite	Costanti e variabili
s = 18 m α = 54°	$s_x \cong$ 10,6 m $s_y \cong$ 14,6 m	$\mathbf{s}_x$ = componente di **s** lungo l'asse x $\mathbf{s}_y$ = componente di **s** lungo l'asse y



$\cos\alpha = s_x / s \quad \Rightarrow \quad s_x = s \cdot \cos\alpha = 18\ m \cdot \cos 54° =$
$= 18\ m \cdot 0{,}588 \cong 10{,}6\ m$

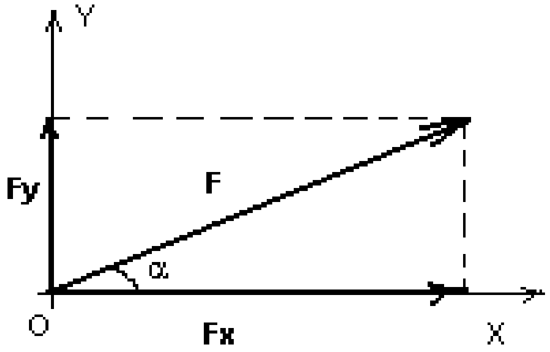
$\text{sen}\alpha = s_y / s \quad \Rightarrow \quad s_y = s \cdot \text{sen}\alpha = 18\ m \cdot \text{sen}54° =$
$= 18\ m \cdot 0{,}809 \cong 14{,}6\ m$

Problema 2.9

Le componenti cartesiane di una forza sono: $F_x = 25$ N e $F_y = 16$ N. Determinare il modulo della forza e la sua direzione rispetto all'asse delle ascisse.

Risoluzione

Dati	Incognite
$F_x = 25$ N $F_y = 16$ N	$F \cong 29{,}7$ N $\alpha \cong 33°$



$F = \sqrt{(F_x^2 + F_y^2)} = \sqrt{(25^2 + 16^2)} = \sqrt{(625 + 256)} =$
$= \sqrt{881} \cong 29{,}7$ N

$\tan\alpha = F_y / F_x = 16\ N / 25\ N = 0{,}65 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 33°$

Problema 2.10

Su un piano inclinato lungo 20 m ed alto 5 m vi è un corpo che pesa 300 kg. Determinare le due componenti, parallela e perpendicolare al piano, della forza peso e l'angolo di inclinazione del piano.

Risoluzione

Dati

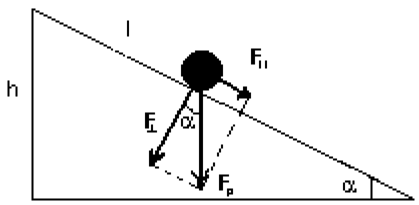
$l = 20$ m
$h = 5$ m
$F_p = 300$ kg

Incognite

$F_{||} = 75$ kg
$F_{\perp} \cong 290$ kg
$\alpha = 14{,}5°$

Costanti e variabili

$F_{||}$ = componente di F_p parallela al piano inclinato
$F_{\perp}$ = componente di F_p perpendicolare al piano inclinato



$\text{sen}\alpha = h / l = 5 \text{ m} / 20 \text{ m} = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 14{,}5°$
$F_{||} : F_p = h : l = \text{sen}\alpha$
$F_{||} = F_p \cdot \text{sen}\alpha = 300 \text{ kg} \cdot 0{,}25 = 75 \text{ kg}$
$F_{\perp} = F_p \cdot \cos\alpha = 300 \text{ kg} \cdot 0{,}968 = 290 \text{ kg}$

Problema 2.11

Un triangolo scaleno ha i lati di 22 cm, 45 cm e 56 cm. Determinare i tre angoli.

Risoluzione

Dati

$a = 22$ cm
$b = 45$ cm
$c = 56$ cm

Incognite

$\alpha \cong 21{,}9°$
$\beta \cong 49{,}7°$
$\gamma \cong 108{,}4°$

Costanti e variabili

α = angolo opposto ad a
β = angolo opposto a b
γ = angolo opposto a c

Dal Teorema di Carnot:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$; $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$; $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$ si ha:
$\cos\alpha = (b^2 + c^2 - a^2) / 2 \cdot b \cdot c = (45^2 + 56^2 - 22^2) / 2 \cdot 45 \cdot 56 \cong 0{,}928 \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 21{,}9°$
$\cos\beta = (a^2 + c^2 - b^2) / 2 \cdot a \cdot c = (22^2 + 56^2 - 45^2) / 2 \cdot 22 \cdot 56 \cong 0{,}647 \quad \Rightarrow \quad \beta \cong 49{,}7°$
$\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2) / 2 \cdot a \cdot b = (22^2 + 45^2 - 56^2) / 2 \cdot 22 \cdot 45 \cong -0{,}317 \quad \Rightarrow \quad \gamma \cong 108{,}4°$
Verifica: $\alpha + \beta + \gamma = 21{,}9° + 49{,}7° + 108{,}4° = 180°$