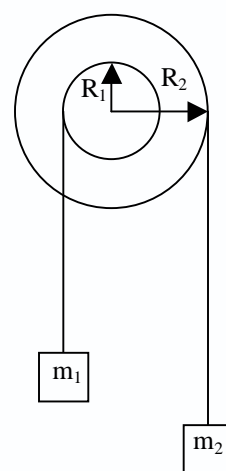


**Esercitazione settimanale numero 1 – Dinamica dei corpi rigidi**

**Esercizio 1** Due corpi sono appesi mediante fili ideali a due pulegge (carrucole) solidali tra loro e girevoli attorno ad un asse comune, come illustrato in figura. Il momento d'inerzia complessivo è  $I$  ed i raggi dei dischi sono  $R_1$  ed  $R_2$ . I fili non slittano sulle pulegge. Nota  $m_1$  si trovi  $m_2$  perché il sistema di si trovi in equilibrio e fermo. Attaccata delicatamente una massa  $m_3$  ad  $m_1$ , si trovino l'accelerazione angolare delle pulegge e le tensioni dei fili. Siano:  $m_1=24kg$ ,  $m_3=12kg$ ,  $R_1=0.4m$ ,  $R_2=1.2m$ ,  $I=40kg\ m^2$ .



**Soluzione**

Nella condizione di equilibrio statico le due masse  $m_1$  ed  $m_2$  sono ferme ed hanno accelerazione nulla. Si noti che tale condizione è di equilibrio indifferente; se infatti si cambia la posizione delle masse in altezza e le si lascia in un'altra posizione con velocità nulla esse rimangono comunque immobili.

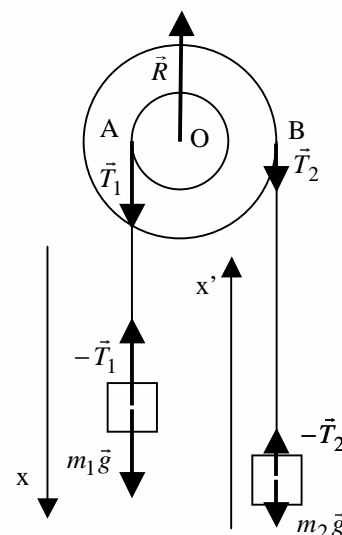
Prima di tutto evidenziamo quali forze agiscono sui componenti del sistema. Esse sono schematizzate in figura. Le tensioni che agiscono ai capi dei fili sono uguali ed opposte, dal momento che i fili sono inestensibili e di massa nulla.

Affinché, in condizioni statiche, le due masse  $m_1$  ed  $m_2$  siano in equilibrio è necessario che siano sottoposte ad accelerazione e risultante delle forze totali nulle. Ne consegue che:

$$m_1 \vec{g} - \vec{T}_1 = 0 \quad \text{e} \quad m_2 \vec{g} - \vec{T}_2 = 0$$

Si ha quindi che:

$$m_1 g = T_1 \quad \text{e} \quad m_2 g = T_2$$



Affinché la puleggia sia ferma è necessario invece che siano nulle sia la risultante delle forze che agiscono su essa che la risultante dei momenti delle forze. La prima condizione garantisce che il centro di massa della puleggia sia fermo, la seconda che il corpo rigido non sia in rotazione. A meno che non si voglia calcolare l'intensità della forza di reazione vincolare che trattiene la puleggia la prima condizione non è per noi interessante. La seconda ci permette invece di risolvere la prima domanda del problema.

Scegliamo come punto rispetto al quale calcolare i momenti delle forze il centro di massa O della puleggia. Rispetto a tale punto il momento della reazione vincolare è nullo ed il calcolo risulta semplificato non è necessario conoscerne l'intensità. La risultante dei momenti delle forze, che deve essere nulla, sarà dovuta quindi solo alle tensioni:

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{T}_1 + \vec{OB} \times \vec{T}_2 = 0$$

Proiettando tale relazione vettoriale sull'asse di rotazione della puleggia, uscente ad esempio dal piano del foglio si ha:

$$\overline{OA} \cdot T_1 - \overline{OB} \cdot T_2 = R_1 \cdot T_1 - R_2 \cdot T_2 = R_1 \cdot m_1 \cdot g - R_2 \cdot m_2 \cdot g = 0$$

da cui si ottiene:

$$m_2 = m_1 \frac{R_1}{R_2} = 24kg \frac{0.4m}{1.2m} = 8kg$$

Nel momento in cui si attacca la massa  $m_3$  alla massa  $m_1$  il sistema non è più in equilibrio e si mette in movimento. Le equazioni che abbiamo usato precedentemente si modificano ed in esse compaiono le accelerazioni lineari di  $m_1+m_3$  e di  $m_2$  e quella angolare della puleggia. Avremo:

$$\begin{cases} (m_1 + m_3) \vec{g} - \vec{T}_1 = (m_1 + m_3) \vec{a}_1 \\ m_2 \vec{g} - \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2 \\ \overline{OA} \times \vec{T}_1 + \overline{OB} \times \vec{T}_2 = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

dove  $\vec{L}$  è il momento angolare della puleggia. Si noti che in condizioni di moto non uniforme le reazioni vincolari non eguagliano più in modulo le forze peso agenti sulle masse. Proiettando le prime due relazioni su due assi lineari  $x$  ed  $x'$  diretti come in figura e la terza lungo l'asse  $z$ , si ottiene:

$$\begin{cases} (m_1 + m_3)g - T_1 = (m_1 + m_3)a_1 \\ m_2g - T_2 = m_2a_2 \\ R_1T_1 - R_2T_2 = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \end{cases}$$

dove  $I$  è il momento di inerzia della puleggia rispetto all'asse  $z$  ed  $\alpha$  è la sua accelerazione angolare. Le accelerazioni lineari non sono indipendenti da  $\alpha$  ma sono ad essa legate dalle relazioni:

$$a_1 = \alpha R_1 \quad \text{e} \quad a_2 = \alpha R_2$$

che possono essere ricavate con semplici considerazioni sul moto circolare. Si ha quindi:

$$\begin{cases} (m_1 + m_3)g - T_1 = (m_1 + m_3)R_1\alpha \\ m_2g - T_2 = m_2R_2\alpha \\ R_1T_1 - R_2T_2 = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \end{cases}$$

da cui è ora possibile ricavare le tre incognite  $\alpha$ ,  $T_1$  e  $T_2$ . Si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha = g \frac{(m_1 + m_3)R_1 - m_2R_2}{I + (m_1 + m_3)R_1^2 + m_2R_2^2} = 0.084 \frac{rad}{s^2} \\ T_1 = (m_1 + m_3) \cdot (g - R_1\alpha) = 352N \\ T_2 = m_2 \cdot (g - R_2\alpha) = 78N \end{cases}$$

**Esercizio 2** Un proiettile di massa  $m$  e velocità di modulo  $v$  viene sparato contro una porta di legno, in direzione ortogonale al piano della porta stessa. Se dopo l'urto il proiettile rimane conficcato nella porta, calcolare la velocità angolare con la quale la porta viene messa in rotazione attorno al suo asse. La porta è alta  $h$ , larga  $l$  ed ha massa  $M$  ed il proiettile la colpisce ad una distanza  $d$  dall'asse dei cardini. Sapendo poi che, dopo l'urto, sulla porta agiscono delle forze di attrito che esercitano un momento frenante  $M_A$  rispetto all'asse di rotazione, calcolare l'angolo totale di cui ruota la porta prima di fermarsi di nuovo. Siano:  $M=10\text{kg}$ ,  $m=50\text{g}$ ,  $h=2\text{m}$ ,  $l=0.8\text{m}$ ,  $d=0.6\text{m}$ ,  $v=30\text{m/s}$ ,  $M_A=0.3\text{ N}\cdot\text{m}$ .

### Soluzione

L'urto tra il proiettile e la porta è completamente anelastico. Nel corso dell'urto agiscono sui corpi sia forze interne che forze esterne al sistema. Il proiettile è soggetto alla forza peso ed alla forza interna impulsiva che la porta esercita su di esso durante l'urto. La porta è soggetta alla forza peso, alla forza interna impulsiva che il proiettile esercita su di essa ed alla forza esterna di reazione impulsiva che il vincolo costituito dall'asse di rotazione. La forza di reazione impulsiva esercitata dal vincolo è di intensità comparabile alle forze interne e non può essere in genere trascurata, come invece si fa normalmente con le forze peso. Ne consegue che le due equazioni cardinali per il sistema costituito da proiettile e porta nel corso dell'urto si scrivono:

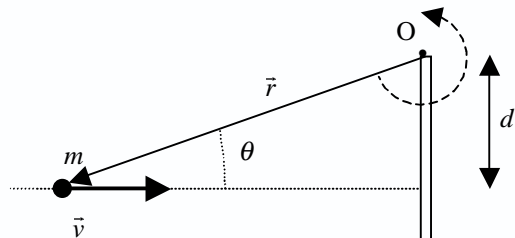
$$\vec{F}^{(E)} = \vec{R} = (m + M)\vec{a}_{CM} \quad \text{e} \quad \vec{M}^{(E)} = \vec{r} \times \vec{R} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

dove  $\vec{r}$  è il raggio vettore che va dal polo al punto di applicazione di  $\vec{R}$ .

Dalla prima relazione consegue che la quantità di moto totale del sistema non è costante ovvero che vi è un'accelerazione del centro di massa, causata proprio dalla reazione vincolare impulsiva. La seconda relazione invece può essere invece semplificata; se infatti si sceglie come polo O per il calcolo dei momenti un punto che trovi sull'asse di rotazione della porta il momento della reazione vincolare è nullo, perché essa è applicata proprio all'asse di rotazione. Si ha quindi che:

$$\vec{M}^{(E)} = \vec{r} \times \vec{R} = 0 \quad \text{da cui} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

ovvero che il momento angolare totale del sistema si conserva durante l'urto. In particolare si conserverà la componente del momento lungo l'asse  $z$  che contiene i cardini, scelto verso l'alto. Questa condizione permette di calcolare la velocità angolare del sistema porta/proiettile immediatamente dopo l'urto. Facciamo riferimento alla figura, in cui il sistema è raffigurato dall'alto. Prima dell'impatto al momento angolare totale del sistema rispetto ad O contribuisce solamente il proiettile. Si ha:



$$\vec{L}_{in} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

che ha componente solo lungo  $z$  di modulo costante:

$$L_{z,in} = r \cdot mv \cdot \sin \theta = r \cdot \sin \theta \cdot mv = d \cdot mv$$

Immediatamente dopo l'urto il proiettile rimane attaccato alla porta e si mette a ruotare con essa intorno all'asse  $z$ . Il momento angolare immediatamente dopo l'urto ha componente lungo  $z$  data da:

$$L_{z,fin} = I_{TOT} \omega_{fin}$$

dove  $I_{TOT}$  è il momento d'inerzia del sistema porta/proiettile rispetto all'asse  $z$ . Dal momento che durante l'urto il momento angolare del sistema deve rimanere costante, si avrà anche:

$$L_{z,fin} = L_{z,in} \quad \text{da cui} \quad \omega_{fin} = \frac{d \cdot m \cdot v}{I_{TOT}}$$

Per ottenere il valore della velocità angolare con cui si mette in moto la porta è necessario ricavare il momento d'inerzia del sistema porta/proiettile dopo l'urto rispetto all'asse z. Dal momento che il momento d'inerzia è una grandezza fisica additiva, esso sarà dato da:

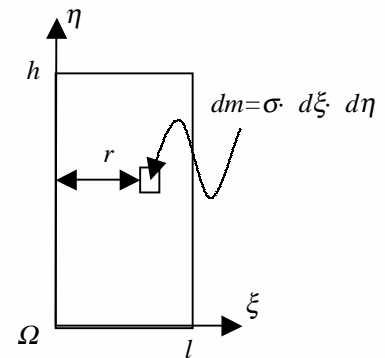
$$I_{TOT} = I_{porta} + md^2$$

Facendo riferimento alla figura, il momento d'inerzia della porta può essere calcolato a partire dalla sua definizione:

$$I_{porta} = \int r^2 dm$$

Se si trascura lo spessore della porta, la sua massa sarà distribuita sulla superficie con una densità superficiale di massa costante  $\sigma = M / hl$ . Assumendo un sistema di riferimento  $\Omega\xi\eta$  come in figura il calcolo risulta semplice:

$$I_{porta} = \int_0^h \int_0^l \sigma \cdot \xi^2 d\xi d\eta = \sigma \int_0^h d\eta \int_0^l \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \sigma \cdot h \cdot l^3 = \frac{1}{3} M \cdot l^2$$



Si ha quindi:

$$\omega_{fin} = \frac{d \cdot m \cdot v}{\frac{1}{3} M \cdot l^2 + md^2} = 0.42 \text{ rad / s}$$

Immediatamente dopo l'urto il sistema inizierà quindi a ruotare con tale velocità angolare  $\omega_{in}$ , che da ora in poi chiamiamo  $\omega$  per semplicità. Se non vi fossero forze che esercitano momento con componente lungo l'asse di rotazione z tale velocità rimarrebbe costante. Nel caso in cui vi siano delle forze di attrito che esercitano un momento frenante costante  $M_A$ , come indicato nel testo, la velocità angolare della porta tenderà a diminuire. La seconda equazione cardinale, proiettata lungo l'asse z, restituisce la relazione:

$$-M_A = I_{TOT} \frac{d\omega}{dt}$$

in cui si è tenuto conto del fatto che il momento è frenante mediante il segno meno. Risolvendo tale equazione differenziale avremo:

$$d\omega = -\frac{M_A}{I_{TOT}} dt$$

che integrata dall'istante iniziale, immediatamente successivo all'urto, ed il generico istante t:

$$\int_{\omega_0}^{\omega(t)} d\omega' = -\int_0^t \frac{M_A}{I_{TOT}} dt'$$

Se il momento frenante è costante nel tempo si ottiene:

$$\omega(t) - \omega_0 = -\frac{M_A}{I_{TOT}} t \quad \text{da cui} \quad \omega(t) = \omega_0 - \frac{M_A}{I_{TOT}} t$$

Il moto è quindi uniformemente decelerato. Possiamo calcolare il tempo di arresto imponendo che la velocità angolare si annulli. Si ha:

$$t_{arresto} = \frac{\omega_0 I_{TOT}}{M_A} = 3.0s$$

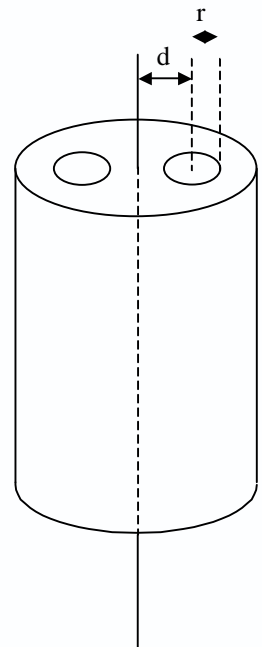
La posizione angolare della porta, descritta dall'angolo  $\theta$  di rotazione intorno all'asse  $z$ , può essere ricavata integrando ulteriormente l'espressione della velocità angolare. Avremo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{M_A}{I_{TOT}} t^2$$

Si avrà quindi:

$$\Delta\theta = \theta(t_{arresto}) - \theta_0 = \omega_0 t_{arresto} - \frac{1}{2} \frac{M_A}{I_{TOT}} t_{arresto}^2 = 0.63rad = 36^\circ$$

**Esercizio 3** Il momento d'inerzia di un cilindro pieno di raggio  $R$  ed altezza  $h$ , rispetto all'asse di simmetria, è pari a  $I = \frac{1}{2} MR^2$ . Si provi a calcolare tale espressione mediante integrazione. Si abbia poi un cilindro pieno di raggio  $R$ , altezza  $h$  e massa  $M$  nel quale sono stati praticati due fori di raggio  $r$  lungo la direzione dell'asse di simmetria a distanza  $d$  da esso, come mostrato in figura. Si calcoli il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse di simmetria.



### Soluzione

Il momento d'inerzia di un cilindro pieno si può calcolare a partire dalla definizione:

$$I = \int r^2 dm$$

Per il calcolo dell'integrale utilizziamo il sistema di coordinate cilindriche indicato in figura. La posizione di un generico punto  $P$  viene identificata tramite la sua quota  $z$ , la sua distanza  $r$  dall'asse di simmetria e dall'angolo che la perpendicolare all'asse di simmetria forma con l'asse  $x$ . In questo sistema di coordinate l'elemento di volume elementare è definito come:

$$dV = r dr d\theta dz$$

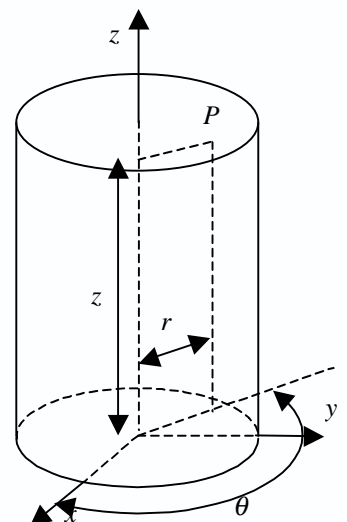
Tale espressione può essere ricavata facilmente ricordando che un elemento di superficie infinitesimo nel piano  $xy$  può essere espresso in coordinate polari come:

$$dS = r dr d\theta$$

e che l'elemento di volume infinitesimo di altezza  $dz$  in coordinate cilindriche si ottiene moltiplicando tale area per l'altezza  $dz$  stessa. Nella figura che segue viene rappresentato l'elemento di volume in coordinate cilindriche per chiarezza.

Il momento d'inerzia risulterà quindi dato da:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^R r^3 dr$$



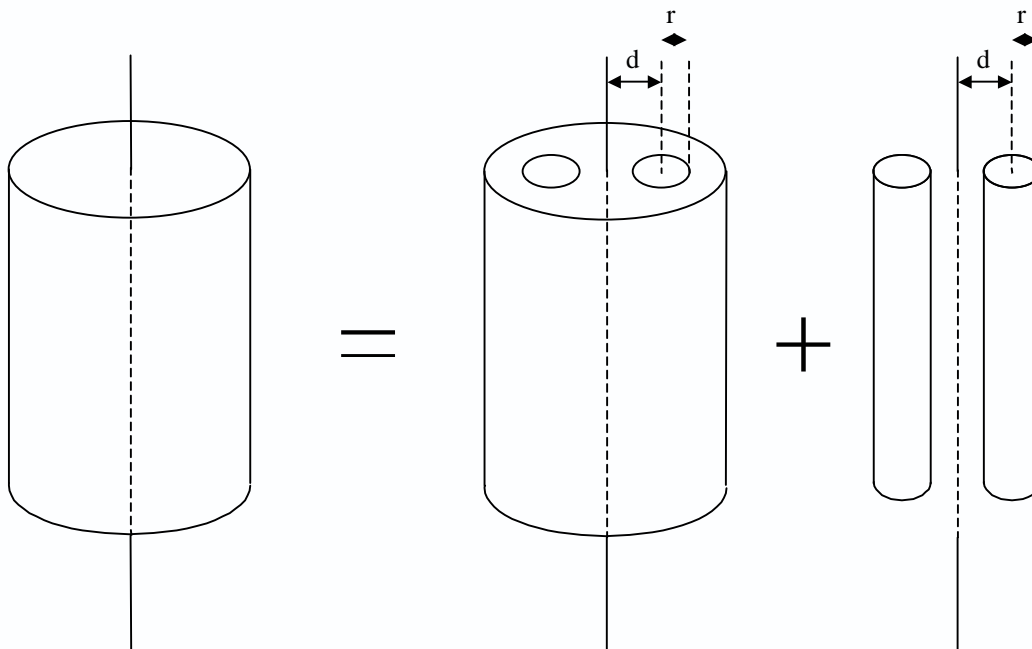
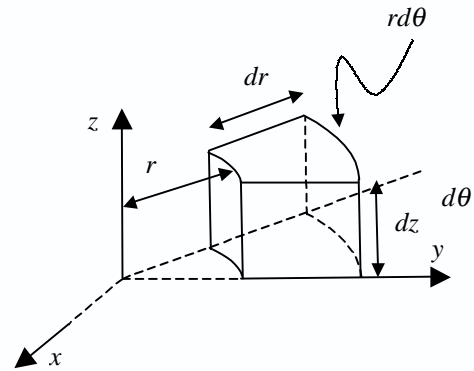
in cui  $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 h}$  è la densità di massa del cilindro. Si ha:

$$I = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

È importante notare che nel risultato non compare l'altezza  $h$  del cilindro. Ciò vuol dire che se schiacciassimo il cilindro non cambierebbe il valore di  $I$ ; ciò è ragionevole in quanto il momento d'inerzia dipende dalla distanza delle masse dall'asse di rotazione e non da  $z$ .

Il momento d'inerzia del cilindro con i fori può essere calcolato in modo semplice applicando alcune considerazioni. Se cercassimo di utilizzare il metodo diretto appena utilizzato per il cilindro pieno avremmo dei problemi di calcolo perché il dominio di integrazione è di forma complicata.

Prima di tutto ricordiamo che il momento d'inerzia è una quantità additiva. Possiamo dire che il momento d'inerzia di un cilindro pieno di massa  $M$  rispetto all'asse di simmetria è la somma del momento d'inerzia del cilindro con i fori più il momento d'inerzia di due cilindri di raggio pari al raggio dei fori, massa  $m$  e densità uguale a quella del cilindro forato. Graficamente si ha:



In termini analitici si avrà:

$$I_{\text{cilindro pieno}} = I_{\text{cilindro con fori}} + 2I_{\text{cilindro fuori asse}}$$

Da cui ricavando l'espressione del momento d'inerzia del cilindro con fori:

$$I_{\text{cilindro con fori}} = I_{\text{cilindro pieno}} - 2I_{\text{cilindro fuori asse}}$$

Il momento d'inerzia dei due cilindri fuori asse rispetto all'asse  $z$  si può calcolare mediante il teorema di Huyghens-Steiner. Avremo:

$$I_{\text{cilindrofuori asse}} = I_{\text{cilindro}} + md^2 = \frac{1}{2} mr^2 + md^2$$

Il momento d'inerzia del cilindro con i fori sarà allora dato da:

$$I_{\text{cilindro con fori}} = \frac{1}{2}MR^2 - mr^2 - 2md^2$$

**Esercizio 4** Un volano con momento d'inerzia  $I=245\text{kg}\cdot\text{m}^2$  ruota a 20 giri/s. Ad un certo istante inizia a subire l'azione di un momento esterno costante e si ferma dopo aver compiuto 1000 giri. Trovare il modulo del momento ed il tempo che trascorre dall'istante iniziale fino a quello in cui il volano si ferma.

**Soluzione**

La dinamica del moto viene determinata dalla seconda equazione cardinale che può essere direttamente proiettata sull' asse di rotazione:

$$-M = \frac{dL_z}{dt} = \frac{dI_z\omega}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

nella quale il segno negativo tiene conto del fatto che il momento è frenante. Si ha quindi:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{M}{I_z}$$

Integrando l' equazione differenziale si ottiene per l' andamento temporale  $\omega$

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{M}{I_z}t$$

dove  $\omega_0$  è la velocità angolare iniziale del disco. Possiamo calcolare il tempo di arresto imponendo che la velocità angolare si annulli:

$$t_{\text{arresto}} = \frac{\omega_0 I_z}{M}$$

Integrando ulteriormente, ricaviamo la posizione angolare del volano nel tempo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{M}{I_z} t^2$$

da cui:

$$\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0 = \omega_0 t - \frac{1}{2} \frac{M}{I_z} t^2$$

Imponendo la condizione che il volano giri di un angolo  $\Delta\theta=1000 \cdot 2\pi$  prima di fermarsi possiamo calcolare il momento frenante:

$$M = \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 I_z}{\Delta\theta} = 307\text{N}\cdot\text{m}$$

Sostituendo M nell'espressione del tempo di arresto si ha:

$$t_{\text{arresto}} = \frac{\omega_0 I_z}{M} = 100.3\text{s}$$